

Probabilités

1. Expérience aléatoire, événements

Une **expérience aléatoire** est par définition une expérience dont on peut décrire les résultats possibles *a priori*, sans être capable de déterminer à l'avance celui qui se produira. En latin, « *alea* » signifie « **hasard** ».

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.

En probabilité l'**univers** Ω (lettre grecque qui se lit « oméga ») est l'ensemble de tous les cas possibles, c'est-à-dire de **toutes** les issues.

On appelle **événement** une partie de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Le hasard ne permet pas tout. **Le hasard obéit à des lois.**

Événements compatibles : ce sont des événements qui peuvent se réaliser en même temps.

Événements incompatibles : ce sont des événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps.

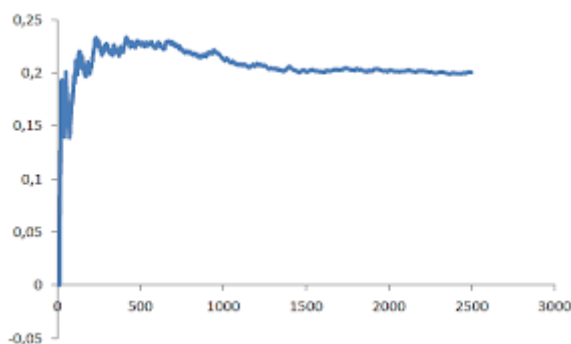
On appelle **cas favorables** le nombre de possibilités d'obtenir l'issue attendue à l'expérience aléatoire.

On appelle **cas possibles** l'ensemble de tous les résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

2. Probabilités : définition et calculs

- La fréquence d'une issue d'une expérience aléatoire n'est pas la même lorsqu'on examine plusieurs échantillons de même taille : on dit que **la fréquence fluctue**.

Exemple : les lancers de pièces effectués par les élèves.



- Lorsque la taille de l'échantillon augmente et devient très grande, cette fréquence se stabilise vers un nombre appelé **probabilité** de l'issue.

Exemple : dans un lancer de dé, la probabilité de l'issue « obtenir 1 » est : $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

Remarque : la probabilité est, comme la fréquence, un nombre compris entre **0** et **1**.

$$0 < p(A) < 1$$

- Un **événement** est constitué d'issues d'une expérience aléatoire.

Un événement constitué d'une seule issue est un **événement élémentaire**.

Exemple : « obtenir 1 » est un événement élémentaire, « obtenir un chiffre strictement inférieur à 3 » est un événement.

La **probabilité $p(A)$ d'un événement A** est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

Exemple : la probabilité de l'événement « obtenir 1 » est : $p = \frac{1}{6}$; la probabilité de l'événement « obtenir un chiffre strictement inférieur à 3 » est : $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,333$ (on ajoute les probabilités des issues « obtenir 1 » et « obtenir 2 »).

La **probabilité d'un événement A** , notée $p(A)$ se calcule grâce à la relation suivante :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à l'événement } A}{\text{nombre d'issues possibles.}}$$

- Un événement dont la probabilité est nulle (A : « obtenir 7 avec un seul dé », par exemple) s'appelle un **événement impossible** : $p(A) = 0$.
- Un événement dont la probabilité vaut 1 (B : « obtenir un chiffre entre 1 et 6 avec un dé à 6 faces », par exemple) s'appelle un **événement certain** : $p(B) = 1$.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1 (exemple pour un dé à 6 faces : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$).
- L'**événement contraire** d'un événement A est noté \bar{A} . Sa probabilité est notée $p(\bar{A})$. On a la relation : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ qui est équivalente à $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser.

Exemple : pour un dé équilibré à 6 faces, chaque face a la probabilité d'être tirée ($\frac{1}{6}$), c'est une situation d'équiprobabilité.

3. Fluctuation des fréquences

Lorsque la **taille de l'échantillon** sur lequel est faite l'étude statistique **augmente**, on dit qu'il y a **fluctuation de l'échantillon**. Il y a donc également fluctuation des fréquences correspondantes. Pour un échantillon de grande taille, la **fréquence** expérimentale **tend vers** la fréquence théorique de réalisation, que l'on définira comme étant la **probabilité**.

Un tableau de fréquences expérimentales permet de définir la probabilité de réalisation de l'événement testé.

Par exemple, pour un lancer de dé ou d'une pièce non truqués, on connaît la probabilité des événements. Lors d'un jeu si la fréquence expérimentale ne tend pas vers cette probabilité alors le jeu est truqué.